

# 透明マントの物理学と COMSOLシミュレーション

大妻女子大学  
社会情報学部情報デザイン学科  
落合 友四郎

# Invisibility



# “Harry Potter” invisibility cloak



# Invisible Man



# 透明マンツの設計のステップ

透明マンツの設計には、以下のような段階を踏むことになるだろう。

## 第1段階

透明マンツにするにはどの場所にどのような誘電率、透磁率をもつ物質は配置すればよいかを設計する。(そのような誘電率、透磁率をもつ物質をどのように製造するかは問わない。)

## 第2段階

第1段階で必要になった誘電率や透磁率を持つ物質(メタマテリアル)の設計をする。(必要なメタマテリアル群の設計)

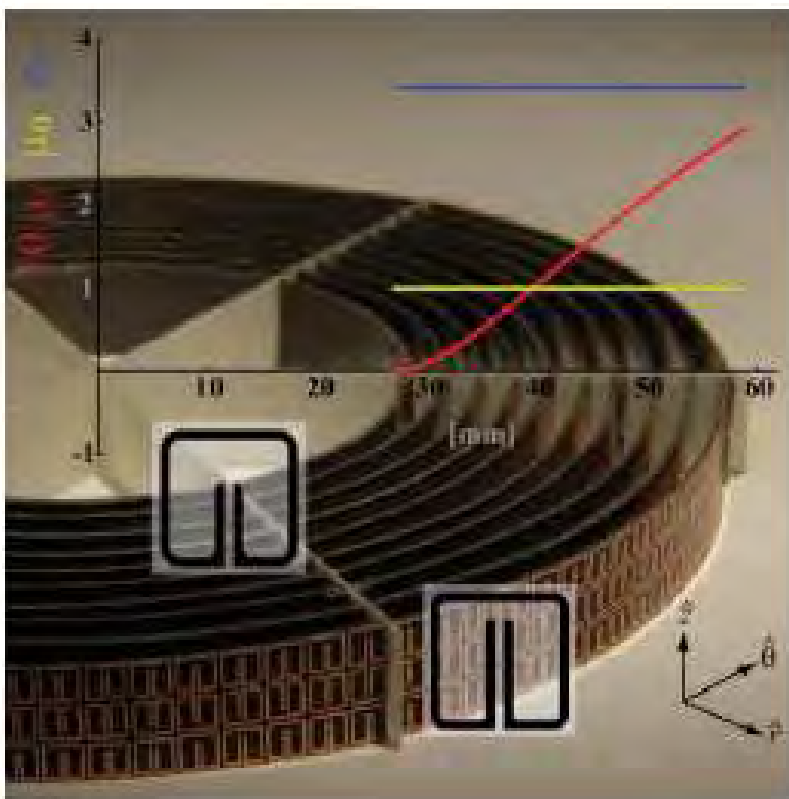
## 第3段階

第1段階、第2段階で得られた設計を基に実際に透明マンツを製造する。

# メタマテリアルとは何か

1. ある種の幾何学構造をもつ金属の構造体を周期的に配置する。その構造体が考えている電磁波の波長より小さい時、その周期的構造体群は電磁的に連続媒質とみなすことができ、**メタマテリアル**と呼ばれる。
2. このように作られたメタマテリアルは、自然界に存在する物質では実現不可能であるような性質をもつ。特に誘電率、透磁率の両方が負になるメタマテリアルのことを**左手系メタマテリアル**という。

# メタマテリアルの例



(D. Schurig et al., Science 314, 977 (2006))



(DRS&JBP(final).doc at 20/02/2004 page 1 of 8  
December 2003 Physics Today)

# Design for invisibility cloak

- In order to design invisibility cloak, we use two different type of spaces: Physical space and Mathematical space.

## Mathematical space

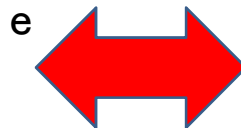
Curved space without material (Curved Vacuum)

Light trajectory is bent by curved space.

Important parameter :  
**Metric tensor**

$$g^{ij}$$

Correspondence



## Physical space

Flat space with material

Light trajectory is bent by permittivity and permeability of material.

Important parameter :  
**permittivity and permeability tensors**

$$\epsilon^{ij}, \mu^{ij}$$



# Maxwell's equation in generalized coordinate system

Maxwell equation in Cartesian coordinate system can be rewritten by using generalized coordinate system.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

$$\partial_i (\sqrt{\gamma} D^i) = \sqrt{g} \rho \rightarrow \sqrt{\gamma} \rho$$

$$\partial_i (\sqrt{\gamma} B^i) = 0$$

$$[ijk] \partial_j E_k = -\frac{\partial (\sqrt{\gamma} B^i)}{\partial t}$$

$$[ijk] \partial_j H_k = \frac{\partial (\sqrt{\gamma} D^i)}{\partial t} + \sqrt{\gamma} j^i \quad (4)$$

$$D^i = \epsilon_0 \epsilon^{ij} E_j$$

$$B^i = \mu_0 \mu^{ij} H_j$$

# The relation between metric tensor permittivity and permeability

We can identify permittivity and permeability of material with metric tensor in curved vacuum.

$$\epsilon^{ij} = \mu^{ij} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}} g^{ij}$$

In physical space, the trajectory of light is bent by permittivity and permeability of material

In mathematical space, the trajectory of light is bent by curved vacuum (metric tensor).

# Anisotropic media and isotropic media

- Design of invisibility cloak with **anisotropic media** should be done by using **general coordinate transformation**

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{ij} = \boldsymbol{\mu}^{ij} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}} g^{ij}$$

- Design of invisibility cloak with **isotropic media** should be done by using **conformal coordinate transformation**  $g^{ij} = n^2 \delta^{ij}$

# Invisibility cloak with anisotropic media

Pendry's group design spherical invisibility cloak, using general coordinate transformation (anisotropic media).

$$\varepsilon_1^1 = \varepsilon_r = \frac{b}{b-a} \left( \frac{r'-a}{r'} \right)^2$$

$$\mu_1^1 = \mu_r = \frac{b}{b-a} \left( \frac{r'-a}{r'} \right)^2$$

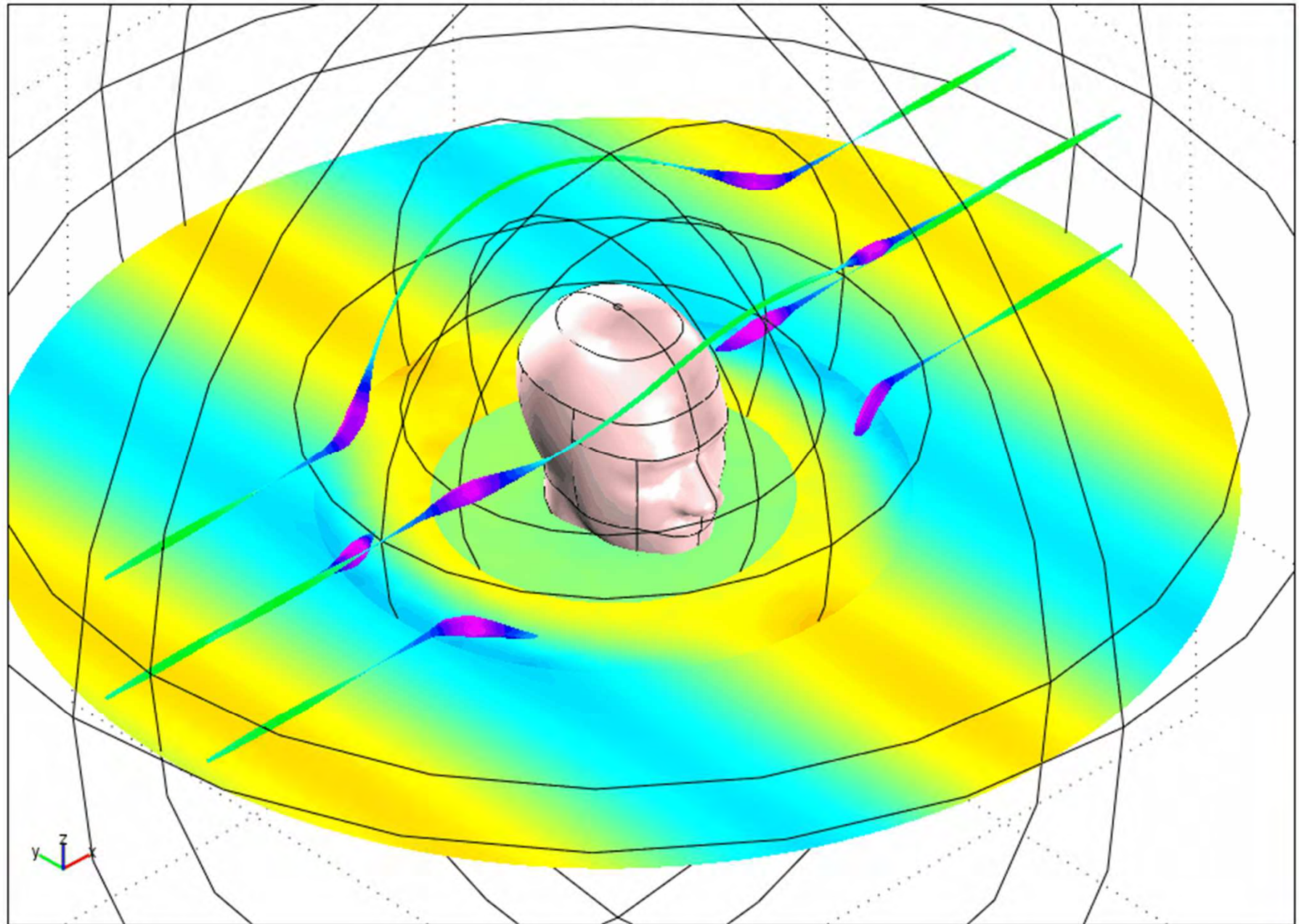
$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_\theta = \frac{b}{b-a}$$

$$\mu_2^2 = \mu_\theta = \frac{b}{b-a}$$

$$\varepsilon_3^3 = \varepsilon_\phi = \frac{b}{b-a}$$

$$\mu_3^3 = \mu_\phi = \frac{b}{b-a}$$

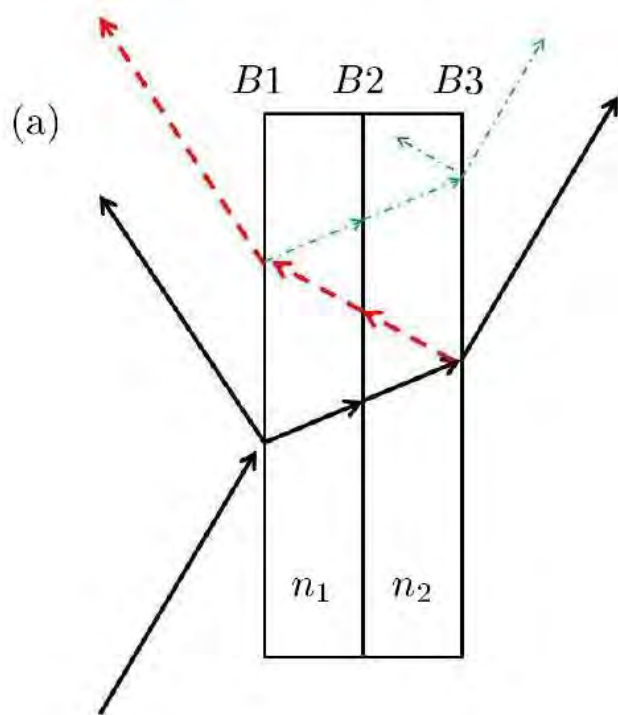
Slice: Electric field, z component [V/m] Boundary: epsilon<sub>r</sub>\_rfw Streamline: Power flow, time average Streamline Color: Magnetic flux density, y component [T]  
Streamline Radius: abs(real(Dz\_rfw))



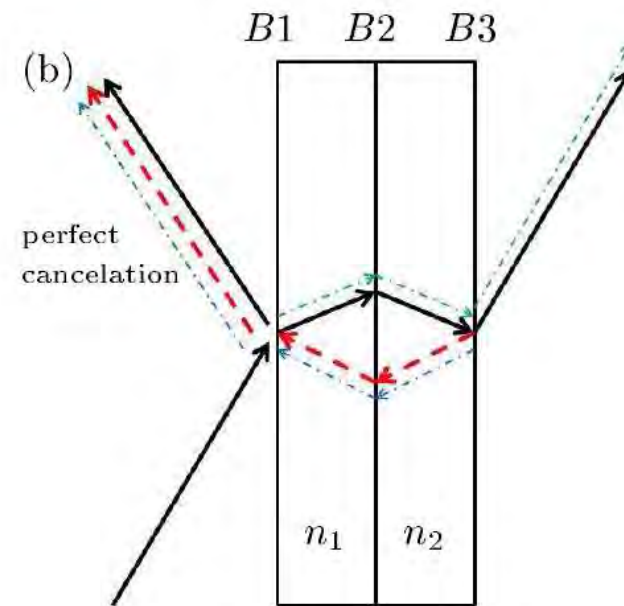
↑

↑

# Cancellation of reflection

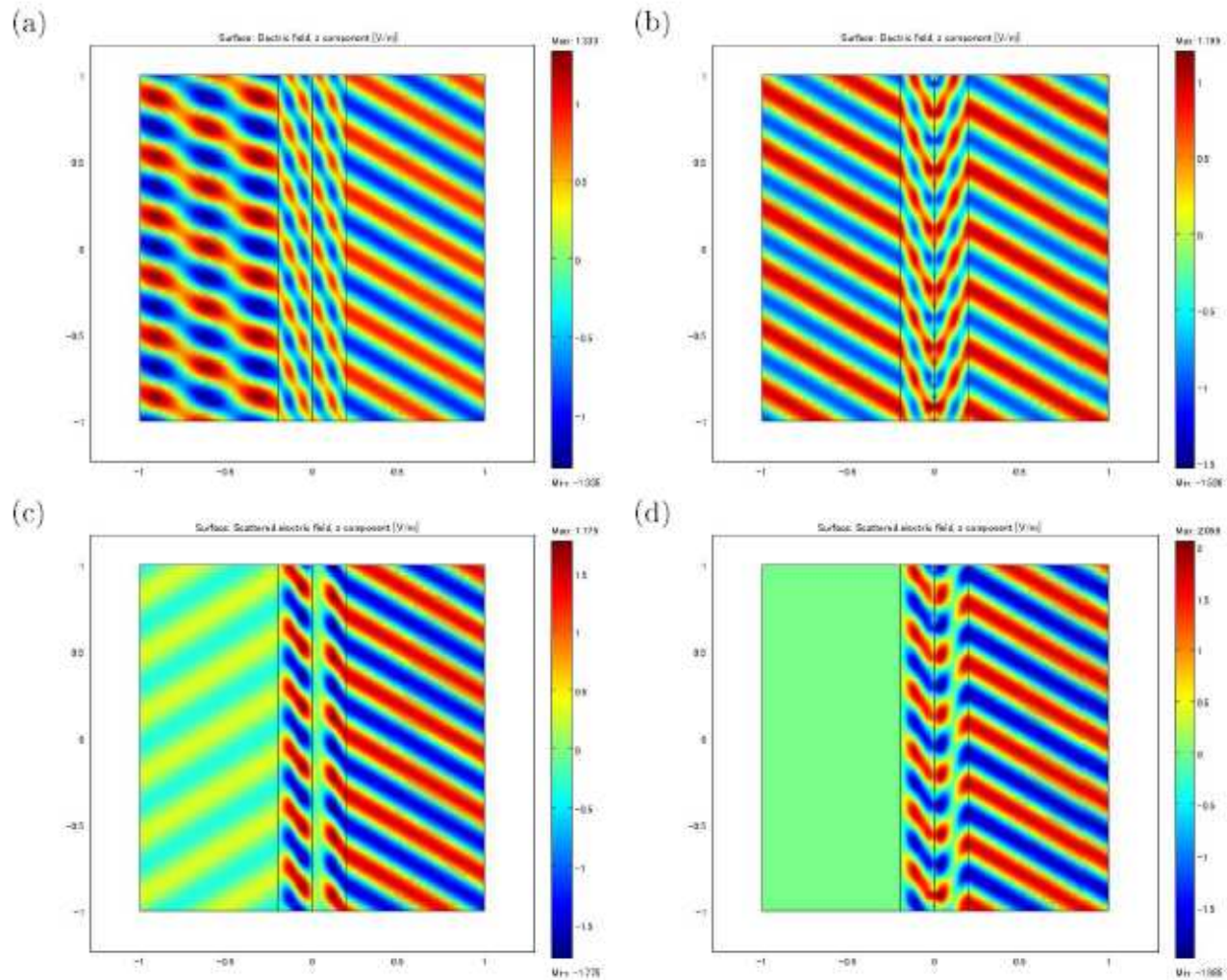


$$n_1 = +2, n_2 = +2$$



$$n_1 = +2, n_2 = -2$$

# Cancellation of reflection



# Thank you!

- [1] J.C. Nacher . T. Ochiai: Plus–minus construction leads to perfect invisibility, *Journal of Mathematical Physics*, 52, 012903 (2011)
- [2] T. Ochiai, U. Leonhardt and J.C. Nacher : A novel design of dielectric perfect invisibility devices, *Journal of Mathematical Physics*, 49, 032903 (2008)